فهرست

مجموعه، الگو و دنباله

فصل اوّل

فصل ۱

- مجموعه و مجموعه های اعداد
- بازه (فاصله)
- بازه های نیمه باز و باز
- مجموعه های متناهی و نامتناهی
- متمم یک مجموعه
- تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه
- الگو
- الگوی خطی
- الگوی غیرخطی
- دنباله
- دنبالهٔ حسابی
- واسطهٔ دنبالهٔ حسابی
- دنبالهٔ هندسی
- واسطهٔ دنبالهٔ هندسی

فصل ۱
مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه و مجموعه‌های اعداد

مجموعه

هر دستهٔ مشخص‌شده از اشیا (متمایز یا غیرتکراری) را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای آن مجموعه می‌نامند و مجموعه‌ها را معمولاً با حروف بزرگ لاتین مانند $A, B, \ldots$ نام‌گذاری می‌کنند.

مجموعهٔ تهی

اگر مجموعه‌ای **بدون** عضو باشد، آن را تهی می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم، بنابراین $\{\ \} = \varnothing$. دقت شود مجموعهٔ $\{\varnothing\}$، تهی نیست، زیرا دارای یک عضو $\varnothing$ است.

مجموعه‌های اعداد معروف

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

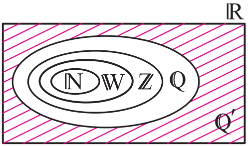
مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\right\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=$ مجموعهٔ اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، در واقع $\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin \mathbb{Q}\}$.

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نتایج

۱ رابطهٔ زیرمجموعه بودن این مجموعه‌ها، به صورت زیر است:



$$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

۲ هر عدد دلخواه را می‌توان بر روی محور اعداد حقیقی نشان داد، از طرفی دیگر هر نقطه روی محور اعداد، بیانگر یک عدد حقیقی مشخص می‌باشد.

مثال درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

مشابه کاردرکلاس کتاب درسی | ص ۲ | تمرین ۱

الف $\sqrt{۲} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ **ب** $\frac{۷}{۵} \in (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}')$ **ج** $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}$

د $-\sqrt{۹} \notin \mathbb{Q}$ **هـ** $\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \varnothing$

جواب

الف درست است، زیرا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

ب درست است، زیرا $\frac{۷}{۵}$ عددی حقیقی می‌باشد.

ج درست است، زیرا $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$؛ از طرفی دیگر می‌دانیم $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

د نادرست است، زیرا $-\sqrt{۹} = -۳$، لذا عددی گویا می‌باشد.

هـ درست است، زیرا مجموعهٔ اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ زیرمجموعهٔ اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ است،
در نتیجه: $\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \varnothing$

مثال کدام‌یک از اعداد زیر گویا و کدام‌یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هریک از آن‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید.

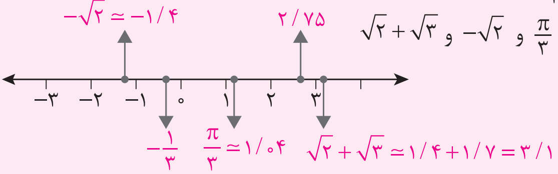
مشابه کاردرکلاس کتاب درسی | ص ۳

$\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ ، $۲/۷۵$ ، $-\sqrt{۲}$ ، $\frac{\pi}{۳}$ ، $-\frac{۱}{۴}$

جواب

اعداد گویا: $-\frac{۱}{۴}$ و $۲/۷۵$

اعداد گنگ: $\frac{\pi}{۳}$ و $-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$



بازه (فاصله)

به زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی، مانند B که بیانگر یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه می‌گوییم. حال اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به قسمی که $a<b$، داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	

نکته

۱ در بازهٔ (a,b) اعداد حقیقی a و b وجود ندارد.

۲ در بازهٔ $[a,b]$ تمام اعداد حقیقی از a تا b وجود دارند.

۳ در بازهٔ $[a,b)$ عدد حقیقی b وجود ندارد.

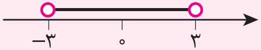
۴ در بازهٔ $(a,b]$ عدد حقیقی a وجود ندارد.

مثال هریک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید. مشابه فعالیت کتاب درسی ص ۳

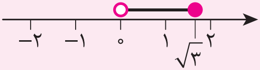
الف) $(-۳,۳)$ ب) $(۰,\sqrt{۳}]$

جواب

الف) $(-۳,۳)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۳<x<۳\}$



ب) $(۰,\sqrt{۳}]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰<x\le\sqrt{۳}\}$



مثال درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید. مشابه تمرین کتاب درسی ص ۵ تمرین ۱

الف) $-۲\in(-۲,۵]$ ب) $۵\in(۱,۵]$ ج) $\varnothing\subseteq\left[-۳,\frac{۴}{۵}\right)$

د) $\{-۱,۱,۲/۵\}\subseteq[-۱,۳)$ هـ) $(-۳,۳)\subseteq[-۳,۳)$ و) $-۱\notin[-۳,۰)$

فصل ۲

- نسبت‌های مثلثاتی
- کاربرد مثلثات در محاسبهٔ مساحت
- دایرهٔ مثلثاتی
- نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی
- رابطهٔ شیب خط با تانژانت
- روابط نسبت‌های مثلثاتی

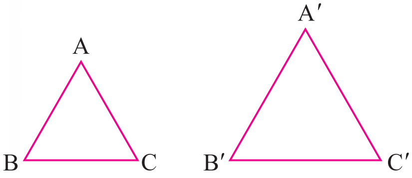
فصل ۲

مثلثات

نسبت های مثلثاتی

قضیهٔ تشابه

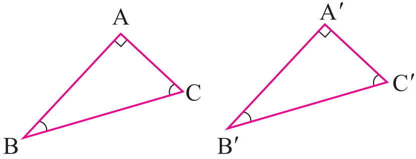
هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



$$\hat{B}=\hat{B}',\quad \hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}',\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

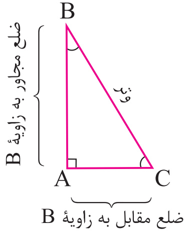
نتیجه: اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل زیر قائم‌الزاویه، باشند و داشته باشیم:

$\hat{C}=\hat{C'}$ آن‌گاه $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$



مثلث قائم‌الزاویه و نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های حاده به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ B}}{\text{طول وتر}}$$

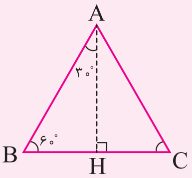
$$\cos\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ B}}{\text{طول وتر}}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ B}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ B}}$$

$$\cot\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ B}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ B}}$$

مقدار	30°	45°	60°
$\sin\hat{B}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\hat{B}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو به طول ضلع یک را درنظر بگیرید. ارتفاع AH رسم شده است. با توجه به شکل، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 30° و 60° را بدون اندازه‌گیری محاسبه کنید. مشابه فعالیت کتاب درسی ص ۳۱ تمرین ۲



جواب

ارتفاع AH میانهٔ ضلع BC است. لذا $BH=\frac{1}{2}$ و طبق قضیهٔ فیثاغورس مقدار AH محاسبه می‌شود:

$$\overset{\Delta}{AHB}\text{ قضیهٔ فیثاغورس در مثلث: } AB^2=AH^2+BH^2$$

$$\Rightarrow 1=AH^2+(\frac{1}{2})^2\Rightarrow AH^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AHB}$ داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

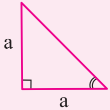
$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

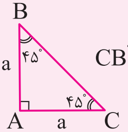
$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین روبه‌رو را در نظر بگیرید، نسبت‌های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید. مشابه مثال کتاب درسی ص ۳۲



جواب

مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است و لذا $\hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ$، از طریق رابطهٔ فیثاغورس طول ضلع BC را می‌یابیم.



$$CB^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow CB^۲ = a^۲ + a^۲ \Rightarrow CB^۲ = ۲a^۲ \Rightarrow CB = a\sqrt{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ C (یا B) در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = ۱$$

$$\cot ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱$$

فصل ۳

- ریشه و توان
- ریشهٔ nام
- توان‌های گویا
- عبارت‌های جبری
- تجزیه
- اتحاد مجموع یا تفاضل مکعب دو جمله‌ای (چاق و لاغر)
- اتحاد مکعب دو جمله‌ای
- عبارت‌های گویا
- جمع و تفریق عبارت‌های گویا
- ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا
- گویا کردن مخرج کسرها

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

ریشه و توان

ریشهٔ دوم فرض کنیم x یک عدد حقیقی و a یک عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر باش، در این صورت اگر داشته باشیم $x^۲ = a$، آن‌گاه x را ریشهٔ دوم عدد a می‌خوانیم.
به عنوان مثال $۴ = (\pm ۲)^۲$ می‌باشد، در نتیجه ریشه‌های دوم عدد ۴، اعداد ± ۲ هستند.

نکته

۱ $x^۲ = a \xrightarrow{a>۰} x = \pm\sqrt{a}$

۲ عدد حقیقی صفر فقط یک ریشهٔ دوم برابر صفر دارد و اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند.

ریشهٔ سوم اگر a و x اعداد حقیقی باشند، طوری که $x^۳ = a$، آن‌گاه عدد x ریشهٔ سوم عدد a است و آن را به صورت $x = \sqrt[۳]{a}$ نمایش می‌دهیم.

نکته تمام اعداد حقیقی یک ریشهٔ سوم دارند و علامت آن همان علامت خود عدد است.

به عنوان مثال: $(-۳)^۳ = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

ریشه‌های چهارم و پنجم

ریشهٔ چهارم: هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ یکدیگرند.

به عنوان مثال:

$۵^۴ = ۶۲۵$

$(-۵)^۴ = ۶۲۵$

$\Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۶۲۵: ۵ و -۵

نکته عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

ریشهٔ پنجم: هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن منفی است.

مثال درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف عدد ۲۷ فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

ب تنها دو عدد وجود دارد که ریشهٔ سوم‌شان با خودشان برابر است.

ج هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ یکدیگرند.

جواب

الف درست است، زیرا: $۲۷ = ۳^۳$ پس $۳ = \sqrt[۳]{۲۷}$

ب نادرست است، زیرا: ریشهٔ سوم عدد ۱، ۰، و ۱- با خودشان برابر است.

ج درست است، زیرا: ریشه‌های زوج هر عدد مثبت قرینهٔ‌یکدیگرند به دلیل آن‌که وقتی به توان زوج می‌رسند مقدارشان برابر هم می‌شود.

مثال مانند نمونه، نظیر هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید. مشابه فعالیت کتاب درسی ص ۴۸

$$(۲^۴) = ۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[۴]{۱۶} = ۲ \quad , \quad \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲} \Leftrightarrow (\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۸}$$

الف $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ **ب** $(۰/۲)^۴ = ۰/۰۰۱۶$ **ج** $\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$

جواب

الف $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \Leftrightarrow (-۳)^۳ = -۲۷$

ب $(۰/۲)^۴ = ۰/۰۰۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶} = ۰/۲$

ج $\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۳\sqrt{۵})^۲ = ۴۵$

مثال جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. مشابه کار در کلاس کتاب درسی ص ۵۱ تمرین ۱ و ۲

عدد	$\frac{۱۶}{۸۱}$				۰/۰۰۱۶			
ریشه های چهارم			-۱	۱			$\frac{۳}{۵}$	

جواب

عدد	$\frac{۱۶}{۸۱}$		۱		۰/۰۰۱۶		$(\mp\frac{۳}{۵})^۴=\frac{۸۱}{۶۲۵}$	
ریشه های چهارم	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	-۱	۱	$-۰/۲$	۰/۲	$\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$

مثال مشخص کنید هریک از عددهای رادیکالی زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند. مشابه کار در کلاس ص ۴۹ تمرین ۲

الف $\sqrt{۱۱}$ **ب** $-\sqrt{۱۲۶}$ **ج** $\sqrt[۵]{۹}$ **د** $\sqrt[۴]{۹۸}$

جواب

الف ۱۱ بین دو عدد مربع کامل $۹=۳^۲$ و $۱۶=۴^۲$ قرار دارد، بنابراین $\sqrt{۱۱}$ بین دو عدد متوالی ۳ و ۴ قرار می‌گیرد.

ب ۱۲۶ بین دو عدد مربع کامل $۱۲۱ = ۱۱^۲$ و $۱۴۴ = ۱۲^۲$ قرار دارد، بنابراین $\sqrt{۱۲۶}$ بین دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ قرار می‌گیرد و درنتیجه $-\sqrt{۱۲۶}$ بین دو عدد متوالی ۱۲- و ۱۱- است.

ج $۱^۵ = ۱ < ۹ < ۲^۵ = ۳۲ \Longrightarrow ۱ < \sqrt[۵]{۹} < ۲$

د $۳^۴ = ۸۱ < ۹۸ < ۴^۴ = ۲۵۶ \Longrightarrow ۳ < \sqrt[۴]{۹۸} < ۴$

مثال در هریک از نامساوی‌های زیر، به جای x چه اعداد طبیعی را می‌توان قرار داد؟

مشابه کار در کلاس کتاب درسی ص ۵۰ تمرین ۴

الف $۲ < \sqrt{x} < ۵$

ب $۱ < \sqrt[۳]{x} < ۳$

جواب

الف

$$۲<\sqrt{x}<۵ \longrightarrow ۲^۲<(\sqrt{x})^۲<۵^۲ \Rightarrow ۴<x<۲۵ \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{۵,۶,\dots,۲۳,۲۴\}$$

ب

$$۱<\sqrt[۳]{x}<۳ \longrightarrow ۱^۳<(\sqrt[۳]{x})^۳<(۳)^۳ \Rightarrow ۱<x<۲۷ \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{۲,۳,\dots,۲۵,۲۶\}$$